Sada příkladů na integrály závislé na parametru

Používáme následující dvě věty o integrálech závyslých na parametru:

Věta 1 (Lebesgueova; o spojité závislosti integrálu na parametru) *Buďte $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, T metrický prostor a $f : T \times X \to \mathbb{R}$ funkce. Nechť dále*

(i) *$f(t, \cdot)$ je měřitelná pro každé $t \in T$,*

(ii) *$f(\cdot, x)$ je spojitá na T pro s.v. $x \in X$,*

(iii) *existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že $|f(t, \cdot)| \leq g)$ s.v. pro všechna $t \in T$.*

Pak $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pro všechna $t \in T$ a funkce $F : t \mapsto \int f(t, x)\, d\mu$ je spojitá na T.

Věta 2 (Záměna integrálu a derivace) *Buďte $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, $I \subset \mathbb{R}$ interval a $f : I \times X \to \mathbb{R}$ funkce. Nechť dále*

(i) *$f(t, \cdot)$ je měřitelná pro každé $t \in T$,*

(ii) *existuje $N \in \mathcal{A}$, $\mu(N) = 0$, taková, že pro všechna $x \in X \setminus N$ a pro všechna $t \in I$ existuje vlastní derivace $\frac{d}{dt} f(t, x)$,*

(iii) *existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že pro všechna $t \in I$, $|\frac{d}{dt} f(t, x)| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in X$,*

(iv) *existuje $t_0 \in I$ takové, že $f(t_0, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$.*

Pak $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pro všechna $t \in I$, funkce $F : t \mapsto \int f(t, x)\, d\mu(x)$ je diferencovatelná na I a platí $F'(t) = \int \frac{d}{dt} f(t, x)\, d\mu(x), \quad t \in I$.

Příklady:

1. Dokažte, že funkce
$$F(a) = \int_0^\infty e^{-ax^2}\, dx$$
je spojitá na $(0, \infty)$.

2. Dokažte, že funkce
$$F(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx,$$
je spojitá na $(0, \infty)$.

3. Dokažte, že funkce
$$F(a) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-ax}\, dx,$$
je spojitá na $(0, \infty)$.

4. Dokažte, že funkce

$$F(a) = \int_0^1 \log(x^2 + a^2)\, dx,$$

je spojitá na $(0, \infty)$.

5. Dokažte, že funkce

$$F(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx,$$

má na intervalu $(0, \infty)$ derivace všech řádů a spočtěte je (ve formě integrálu závislého na parametru).

6. Spočtěte

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x}\, dx,$$

pro $a \in (-1, \infty)$.

7. Spočtěte

$$F(a, b) = \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x} \cdot e^{-bx}\, dx,$$

pro $a \in \mathbb{R}$, $b \in (0, \infty)$.

*8. Spočtěte

$$F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \cdot \log\left(\frac{1 + a\cos x}{1 - a\cos x}\right)\, dx,$$

pro $a \in [-1, 1]$.

**9. Spočtěte

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{\arctan(ax) \cdot \arctan(bx)}{x^2}\, dx,$$

pro $a, b \in \mathbb{R}$.

10. Načrtněte graf funkce

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1 + x^2}\, dx$$

na $[0, \infty)$. Ukažte, že na $(0, \infty)$ platí $F''(a) + F(a) = \frac{1}{a}$.